COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

PUBLIÉS SOUS LES AUSPICES

DE L'ASSOCIATION AMICALE DES ÉLÈVES ET ANCIENS ÉLÈVES

DE LA FACULTÉ DES SCIENCES

# CALCUL

DES

# PROBABILITÉS

PAR

**H. POINCARÉ**

MEMBRE DE L'INSTITUT

RÉDACTION DE

A. QUIQUET

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

**DEUXIÈME ÉDITION, REVUE ET AUGMENTÉE PAR L'AUTEUR**

NOUVEAU TIRAGE 1923

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

1912

s'exprime par une intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\,dx;$$

$\varphi(x)$ sera une fonction sur laquelle nous devrons faire des hypothèses pour connaître la loi de probabilité, mais, en général, on sera conduit à regarder $\varphi(x)$ comme continue.

En général, la probabilité que $x$ satisfasse à une condition donnée dépendra du choix de $\varphi$; cependant, il n'en est pas toujours ainsi, et *certains problèmes sont indépendants de la loi de probabilité.*

Translation below from Google Translate with some help from me.

*Exemple.* — La probabilité pour que $x$ soit incommensurable sera toujours égale à 1, quelle que soit la fonction continue $\varphi$ que l'on choisisse, et celle pour que $x$ soit commensurable, toujours infiniment petite.

92. Second example, Consider a wheel divided into a very large number of equal parts, alternately red and black; let us give it a rapid rotation. When it stops, one of its divisions will be opposite a fixed reference point. What is the probability that this division will be red or black?

To be completely solved, the problem would require knowledge of an arbitrary function; it will depend on the impulse, the initial angular velocity, The probability that this velocity is between wo and w1 is

the function phi being entirely unknown.

On the other hand, the wheel will have turned by a total angle theta

**92.** *Second exemple.* — Soit une *roue* divisée en un très grand nombre de parties égales, alternativement rouges et noires; imprimons-lui une rotation rapide. Lorsqu'elle s'arrêtera, une de ses divisions se trouvera en regard d'un point de repère fixe : quelle est la probabilité pour que cette division soit rouge ou noire?

Pour être complètement résolu, le problème exigerait la connaissance d'une fonction arbitraire; il dépendra de l'impulsion, de la vitesse angulaire initiale. La probabilité pour que cette vitesse soit comprise entre $\omega_0$ et $\omega_1$ est

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \varphi(\omega)\,d\omega,$$

la fonction $\varphi$ étant entièrement inconnue.

D'un autre côté, la roue aura tourné d'un angle total $\theta$. La probabilité pour que $\theta$ soit compris entre $\theta_0$ et $\theta_1$ est

The probability that the angle theta lies between theta1 and theta 2 is

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta)\,d\theta.$$

Nous ne savons rien non plus sur $f(\theta)$. Néanmoins, la probabilité, pour que la division obtenue soit rouge, sera toujours très voisine de $\frac{1}{2}$; elle est donc indépendante de $f$.

We know nothing more of the function f(theta). Nevertheless, the probability that the division obtained is red will always be very close to 1/2; it is therefore independent of f.

Je suppose que chaque division corresponde à un angle $\varepsilon$; je divise l'axe des abscisses en parties égales à $\varepsilon$, et, par les points de division, je mène des ordonnées jusqu'à la rencontre de la courbe

I suppose that each division corresponds to an angle epsilon; I divide the abscissa axis into parts equal to epsilon, and, at the dividing points, I extend the ordinates just until they meet the curve

$$y = f(\theta).$$

Comme les divisions changent de couleur, je couvre de hachures les aires qui correspondent aux divisions rouges, par exemple.

As the divisions change color, I cover the areas that correspond to the red divisions with hatching, for example.

La probabilité cherchée sera le rapport de l'aire couverte de hachures à l'aire totale.

The probability sought will be the ratio of the area covered with hatching to the total area.

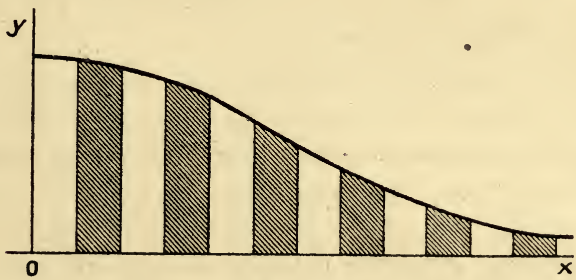


Fig. 15.

Quelle que soit la forme de la courbe, quand le nombre des divisions augmente indéfiniment, ce rapport tendra vers $\frac{1}{2}$

Whatever may be the form of the curve, as the number of divisions grows indefinitely, the ratio will tend to 1/2.

Let, in fact, A be the maximum angle through which the wheel can turn such that theta < A. Suppose the function f(theta) is continuous and admits a derivative. Let us assume further that this derivative does not exceed a certain maximum M. Then

Soit, en effet, A l'angle maximum dont la roue peut tourner de telle sorte que $\theta < \mathrm{A}$. Supposons la fonction $f(\theta)$ continue et admettant une dérivée. Admettons de plus que cette dérivée ne dépasse pas un certain maximum, M. Donc

$$|f'(\theta)| < \mathrm{M}.$$

I divide A into n equal parts; let epsilon be one of them. We have

Je divise A en $n$ parties égales; soit $\varepsilon$ l'une d'elles. On a

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{A}}{n}.$$

Consider two consecutive divisions: the difference between the two areas is much smaller than — — where mu and mu' designate respectively the maximum and the minimum of f(theta) in that interval. Now — is much smaller than —: the difference between the two is much smaller than —.

Considérons deux divisions consécutives : la différence des deux aires est plus petite que $\varepsilon(\mu - \mu')$ où $\mu$ et $\mu'$ désignent respectivement le maximum et le minimum de $f(\theta)$ dans cet intervalle. Or $(\mu - \mu')$ est plus petit que $2\mathrm{M}\varepsilon$ : la différence des deux aires est plus petite que $2\mathrm{M}\varepsilon^2$.

As there are n/2 areas covered by hatching, we must multiply by n/2 to have the difference between the total of the two areas, which gives — or —

Comme il y a $\frac{n}{2}$ aires couvertes de hachures, il faut multiplier par $\frac{n}{2}$ pour avoir la différence des deux aires totales, ce qui donne $\mathrm{M}\varepsilon^2 n$ ou $\mathrm{MA}\varepsilon$.

The difference between the two areas tends therefore towards zero with epsilon and the probability will be indeed 1/2.

La différence des deux aires tendra donc vers zéro avec $\varepsilon$ et la probabilité sera bien $\frac{1}{2}$.

If we knew nothing at all about phi or about f, we could not calculate anything: it is because we know something that we can undertake the calculation. But knowing that/ has a limited derivative. But here is it enough for us to know that f has a bounded derivative.

Si on ne savait rien du tout sur $\varphi$ ou sur $f$, on ne pourrait rien calculer : c'est parce qu'on sait quelque chose que l'on peut entreprendre le calcul. Mais ici il nous suffit de savoir que $f$ a une dérivée limitée.

**93.** *Troisième exemple.* — Considérons un grand nombre de *planètes*, dont les orbites soient sensiblement circulaires. Soient $a$ le moyen mouvement de l'une de ces planètes, $b$ sa longitude à un instant donné pris comme origine. Sa longitude $l$ au temps $t$ sera :

$$l = at + b.$$