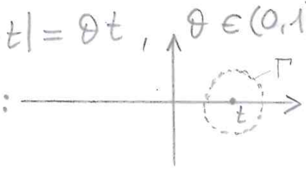
Aufgabe 6 (i)

$$g(t) = \begin{cases} e^{-t^{-\alpha}}, & t > 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases}, \qquad u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k!)} x^{2k}, \qquad \alpha > 1$$

Schranke an $g^{(k)}$: Cauchy-Formel

(*) $$g^{(k)}(t) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{-z^{-\alpha}}}{(z-t)^{k+1}}\, dz ,$$

Γ = Kreis: $|z-t| = \theta t$, $\theta \in (0,1)$
sodass $Re(z) > 0$:



auf Γ: $$z(s) = t + \theta t e^{is} = t(1+\theta e^{is})$$

$$Re(-z^{-\alpha}) = -t^{-\alpha} Re(1+\theta e^{is})^{-\alpha}$$

Wähle θ so klein, dass $Re(1+\theta e^{is})^{-\alpha} > \frac{1}{2}$ $\forall s$

$$\Rightarrow Re(-z^{-\alpha}) < -\frac{t^{-\alpha}}{2}$$

$$\Rightarrow \left|e^{-z^{-\alpha}}\right| \le e^{Re(-z^{-\alpha})} \le e^{-\frac{t^{-\alpha}}{2}}$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} |g^{(k)}(t)| = \frac{k!}{(\theta t)^k} e^{-\frac{t^{-\alpha}}{2}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k} \right| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{2k}}{k!\,(\theta t)^k} e^{-\frac{t^{-\alpha}}{2}} = \exp\left[\frac{1}{t}\left(\frac{|x|^2}{\theta} - \frac{t^{1-\alpha}}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow |u(t,x)| \le U(t,x), \qquad U(t,x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t}\left(\frac{|x|^2}{\theta} - \frac{t^{1-\alpha}}{2}\right)}, & t > 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$$

auch für komplexe x.

$\Rightarrow \sum_k \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k}$ konvergiert <u>normal</u>

Satz von Weierstraß $\Rightarrow$ Konvergenz ist lokal glm. und Ableitungen konvergieren.

Aufgabe 7 (ii)

$$u_\xi(x,t) = (t+1)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x+\xi|^2}{4(t+1)}}$$

Ang. $\sup_{x\in[-1,1]} u_\xi(x,t) \le C \inf_{y\in[-1,1]} u_\xi(y,t) \quad \forall \xi$

$\Rightarrow \quad u_\xi(x,t) \le C u_\xi(y,t) \quad \forall x,y \in [-1,1]$

$\Leftrightarrow \quad \frac{u_\xi(x,t)}{u_\xi(y,t)} \le C$ auf $[-1,1]^2$ unabh. von ξ.

Gegenbeweis:

$$u_\xi(-\tfrac{\xi}{|\xi|},t) = (t+1)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{|\xi|^2}{4(t+1)}\left(1-\frac{1}{|\xi|}\right)^2\right]$$

$$u_\xi(0,t) = (t+1)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{|\xi|^2}{4(t+1)}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{u_\xi(-\frac{\xi}{|\xi|},t)}{u_\xi(0,t)} = \exp\left[-\frac{1}{4(t+1)}\left(-2|\xi|+1\right)\right]$$

$$\xrightarrow{|\xi|\to\infty} \infty$$

$\Rightarrow$ unbeschränkt

$\Rightarrow \nexists\, C$ wie oben.

Für $t_1 < t_2$:

$$\frac{u_\xi(-\frac{\xi}{|\xi|},t_1)}{u_\xi(0,t_2)} \sim \exp\left[|\xi|^2 \underbrace{\left(\frac{1}{4(t_2+1)} - \frac{1}{4(t_1+1)}\right)}_{<0} + \frac{2|\xi|}{4(t_1+1)} + \dots\right]$$

$$\longrightarrow 0$$