Parabolischer Rand:

$$\partial_p X = \{ (x,t) \in \partial X \mid Q_\varepsilon(x,t) \cap X^c \neq \emptyset \ \forall \varepsilon > 0 \},$$

$$Q_\varepsilon(x,t) = \{ (y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x-y| < \varepsilon,\ s \in (t-\varepsilon^2, t) \}$$

$$= B_\varepsilon(x) \times (t-\varepsilon^2, t)$$

Elliptischer Operator:

$L = a_{ij}\partial_{ij} + b_i \partial_i + c$ heißt elliptisch, wenn $\exists \lambda > 0$:

$$a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \lambda |\xi|^2 \quad \forall (x,t) \in X$$

$\leadsto$ $\partial_t - L$ heißt parabolisch

<u>Aufgabe 9:</u> $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, beschränkt

Zu zeigen: L elliptisch, $c \equiv 0$, $u \in C_1^2(X) \cap C^0(\overline{X})$

$$(\partial_t - L)u = 0 \quad \text{in } X.$$

Dann:

$$\sup_{\overline{X}} u = \sup_{\partial_p X} u.$$

<u>Beweis:</u>

Durch Verschiebung: o.B.d.A. $t > 0 \; \forall (x,t) \in X$

Annahme zum Widerspruch:

u nimmt sein Max in $\overline{X} \setminus \partial_p X$ an.

$\rightsquigarrow$ Fall 1: u maximal in $(x_0,t_0) \in X$

Fall 2: u maximal in $(x_0,t_0) \in \partial X \setminus \partial_p X$

<u>Fall 1:</u>

(x_0,t_0) Maximum $\Longrightarrow \quad \partial_t u(x_0,t_0) = \nabla_x u(x_0,t_0) = 0,$

$$D^2 u(x_0,t_0) \leq 0 \qquad (1)$$

$$\Longrightarrow (\partial_t - L)u(x_0,t_0) = -a_{ij}\,\partial_i\partial_j u(x_0,t_0)$$

$$= a_{ij}\left(-\partial_i\partial_j u(x_0,t_0)\right)$$

$$\geq 0, \qquad \text{nach (1) \& Aufg. 10 (iii)}$$

<u>Fall 2:</u>

$(x_0,t_0) \in \partial X \setminus \partial_p X \Longrightarrow \exists\, \rho > 0 : Q(x_0,t_0,\rho) \subset X$

$\Longrightarrow$ (x_0,t_0) ist Max von u auf Zylinder $Q(x_0,t_0,\rho)$.

Wie beim Beweis für Zylinder in der Vorlesung: $\partial_t u \geq 0$, $\nabla u = 0$, $D^2 u \leq 0$.

$$\Longrightarrow \quad (\partial_t - L)\, u(x_0,t_0) = \underbrace{\partial_t u(x_0,t_0)}_{\geq 0} \underbrace{- a_{ij}\, \partial_i \partial_j u(x_0,t_0)}_{\geq 0}$$

$$\geq 0$$

$\rightsquigarrow$ Fall 1 und Fall 2 ergeben Widerspruch, falls $(\partial_t - L)u < 0$.

Für den Fall $(\partial_t - L)u \leq 0$, betrachte

$v(x,t) := u(x,t) - \varepsilon t$.

Dann:

$$(\partial_t - L)v = (\partial_t - L)u - \varepsilon$$

$$< 0$$

$\Longrightarrow$ v nimmt sein Max auf $\partial_p X$ an (nach dem oben bewiesenen).

$$\Longrightarrow \quad \max_{\overline{X}} u \leq \varepsilon T + \max_{\overline{X}} v$$

$$\leq \varepsilon T + \max_{\partial_p X} v$$

$$\leq \varepsilon T + \max_{\partial_p X} u$$

$$\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \max_{\partial_p X} u$$

Hopf-Lemma:

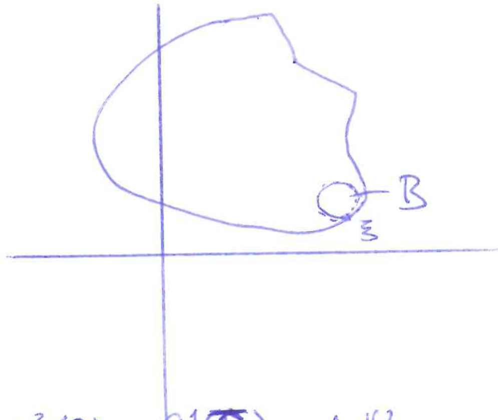
Elliptisch:

Interior Ball condition:

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, C^1-Rand,

$\xi \in \partial\Omega$.

ξ erfüllt interior ball condition, wenn $\exists$ Kugel $B \subset \Omega$ mit $\xi \in \partial B$.



Hopf-Lemma:

L elliptisch, $c \equiv 0$, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ erfüllt

$$Lu \leq 0, \quad \text{in } \Omega$$

$\exists\, x^0 \in \partial\Omega : \; u(x^0) > u(x) \;\; \forall x \in \Omega$ und x^0 erfüllt int. ball condition.

Dann gilt:

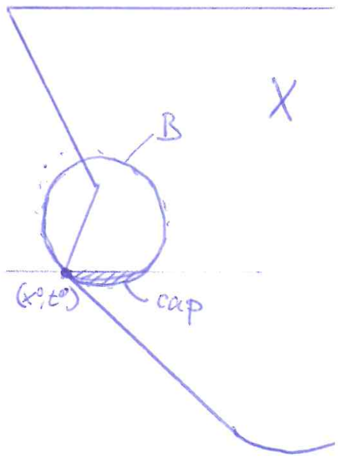
$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0) > 0}$$

Parabolisch:

Spherical cap condition:

$X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, beschränkt, $(x^0, t^0) \in \partial_p X$. (x^0, t^0) erfüllt die SCC, falls $\exists$ Kugel $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit

$$(x^0, t^0) \in \partial B \quad \text{und} \quad B \cap \{t \mid t < t^0\} \subset X.$$



Hopf-Lemma:

L elliptisch, $b = c = 0$, $u \in C_1^2(X) \cap C^0(\bar{X})$ erfüllt

$$(\partial_t - L) u \le 0 \quad \text{in } X,$$

$\exists (x^0, t^0) \in \partial_p X$ mit:

(i) (x^0, t^0) erfüllt SCC, mit $\emptyset \neq A := B \cap \{t < t^0\}$ (cap)

(ii) $u(x,t) < u(x^0, t^0) \quad \forall (x,t) \in A$.

Dann gilt:

$$\limsup_{h \to 0} \frac{u((x^0, t^0) + he) - u(x^0, t^0)}{h} < 0$$

$\forall e: (x^0, t^0) + eh \in A$ für kleine h