Spektraltheorie

X, Y BR, $D \subset X$ UVR, $T: D \to Y$ linear.

Def: T abgeschlossen $:\iff$ $\begin{cases} \text{Wenn } x_n \in D\ \forall n,\ x_n \to x \in X \text{ und} \\ Tx_n \to y \in Y, \text{ dann:} \\ \qquad x \in D \\ \qquad Tx = y \end{cases}$

Abgeschlossenheit vs. Stetigkeit: Betrachte $D = X$ und:

(a) $x_n \to x$

(b) (Tx_n) konvergiert $(y := \lim_{n\to\infty} Tx_n)$

(c) $Tx = y$.

Dann:

- T stetig, falls (a) $\Rightarrow$ (b) $\wedge$ (c)
- T abgeschlossen, falls (a) $\wedge$ (b) $\Rightarrow$ (c)

Satz vom abgeschlossenen Graphen:

X, Y BR, $T: X \to Y$ linear und abgeschlossen.

$\Rightarrow$ T stetig.

Satz von der offenen Abbildung:

X, Y BR, $T: X \to Y$ stetig & surjektiv.

$\Rightarrow$ T offen (d.h. Bilder offener Mengen sind offen)

<u>Lemma:</u> X, Y BR, $T: \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$, $\|x\|_T := \|x\|_X + \|Tx\|_Y \quad \forall x \in \mathcal{D}(T)$

T abgeschlossen $\Longrightarrow (\mathcal{D}(T), \|\cdot\|_T)$ ist BR.

<u>Beweis:</u>

Sei $(x_n) \subset \mathcal{D}(T)$ Cauchy bzgl. $\|\cdot\|_T$, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}: \|x_m - x_n\|_T < \varepsilon \quad \forall m,n > N. \qquad (*)$$

$\Longrightarrow (*)$ gilt für $\|\cdot\|_X$

$\Longrightarrow (x_n)$ CF in X $\qquad (**)$

$\Longrightarrow x_n \longrightarrow x \in X$, da X BR.

Analog:

(Tx_n) CF in Y $\qquad (***)$

$\Longrightarrow Tx_n \longrightarrow y$, da Y BR

$(**), (***) \overset{T \text{ abg.}}{\Longrightarrow} x \in \mathcal{D}(T) \;\&\; Tx = y$

Insgesamt:

$$\|x_n - x\|_X + \|Tx_n - Tx\|_Y \longrightarrow 0 \quad \text{und} \quad x \in \mathcal{D}(T)$$

$\Longrightarrow (x_n)$ konv. in $(\mathcal{D}(T), \|\cdot\|_T)$

$\square$

Spektrum & Resolvente

Def: Sei H HR, $T: D(T) \subset H \to H$ dicht definiert.

(a) $\rho(T) := \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda I - T): D(T) \to H$ bijektiv & $(\lambda I - T)^{-1}: H \to H$ stetig $\}$

heißt Resolventenmenge

(b) $R: \rho(T) \to L(H)$, $R_\lambda = (\lambda - T)^{-1}$ heißt Resolvente

(c) $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ heißt Spektrum von T.

Intuition für Spektrum.

Bem:

Falls T abgeschlossen, so gilt Stetigkeit von $(\lambda - T)^{-1}: H \to H$ automatisch.

Beweis:

Sei λ so, dass $\lambda - T: D(T) \to H$ bijektiv, T abgeschlossen.

Für $x \in D(T)$ setze $\|x\|_T := \|x\|_H + \|Tx\|_H$. Dann ist

$$\lambda - T: (D(T), \|\cdot\|_T) \to (H, \|\cdot\|_H)$$

stetig und $(D(T), \|\cdot\|_T)$ ein BR, da T abgeschlossen.

Satz von der offenen Abb. $\Rightarrow$ $\lambda - T$ offen.

Sei nun $U \subset H$ offen bzgl. $\|\cdot\|_H$. Dann ist das Urbild

$$\left((\lambda - T)^{-1}\right)^{-1}(U) = (\lambda - T)(U \cap D(T))$$

$U \cap D(T)$ ist offen in $(D(T), \|\cdot\|_H) \Rightarrow U \cap D(T)$ offen in $(D(T), \|\cdot\|_T)$

$\overset{\lambda - T \text{ offen}}{\Longrightarrow} (\lambda - T)(U \cap D(T)) \subset H$ offen bzgl. $\|\cdot\|_H$

$\Rightarrow$ Urbilder von $\|\cdot\|_H$-offenen Mengen sind $\|\cdot\|_H$-offen

$\Rightarrow (\lambda - T)^{-1}: H \to H$ stetig.

$\square$

Blatt 5, Aufgabe 18:

$A : D(A) \to X$ linear.

A injektiv, A^{-1} beschränkt $\Longrightarrow$ A abgeschlossen.

Hieraus folgt:

T nicht abgeschlossen $\Longrightarrow$ $\sigma(T) = \mathbb{C}$!

$\rightsquigarrow$ Nur abgeschlossene Op. interessant für Spektraltheorie.

Intuition zu $\sigma(T)$:

Angenommen x EV zu T:

$$Tx = \lambda x.$$

$$\Longleftrightarrow (\lambda - T)x = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda - T \text{ nicht bijektiv}$$

$$\Longrightarrow \lambda \in \sigma(T)$$

Aber $\sigma(T)$ enthält zusätzlich die Punkte λ mit $\lambda - T$ nicht surjektiv.

Spektrum der Resolvente:

Satz:

$T : D(T) \to X$ abgeschlossen, $\rho(T) \neq \emptyset$. Dann gilt:

$$\sigma\left((\lambda_0 - T)^{-1}\right) \setminus \{0\} = \left\{ \frac{1}{\lambda_0 - \mu} \,\middle|\, \mu \in \sigma(T) \right\}$$

Beweis:

Sei $0 \neq \mu \in \mathbb{C}$ und $\lambda_0 \in \rho(T)$. Dann:

$$(\mu - (\lambda_0 - T)^{-1})x = \mu\left((\lambda_0 - \tfrac{1}{\mu}) - T\right)(\lambda_0 - T)^{-1}x \qquad \text{für } x \in H$$

$$= \mu(\lambda_0 - T)^{-1}\left[(\lambda_0 - \tfrac{1}{\mu}) - T\right]x \qquad \text{für } x \in D(T)$$

$$\Longrightarrow \ker(\mu - (\lambda_0 - T)^{-1}) = \ker((\lambda_0 - \tfrac{1}{\mu}) - T)$$

$$\operatorname{Rg}(\mu - (\lambda_0 - T)^{-1}) = \operatorname{Rg}((\lambda_0 - \tfrac{1}{\mu}) - T)$$

$\square$

Kor.

$(\lambda - T)^{-1}$ kompakt $\implies$ $\sigma(T) =$ diskrete Folge von Eigenwerten.

Kor.:

$$\sigma(T) \subset \Theta(T) := \left\{ \frac{\langle x, Tx \rangle}{\langle x, x \rangle} : x \in \mathcal{D}(T) \right\}$$

$\implies$ Dissipative Operatoren mit kompakter Resolvente haben

$$\cancel{\sigma(T)} \subset [\text{linke Halbebene}]$$

$\leadsto$ Dissipative Operatoren haben

$$\Theta(T) := \left\{ \frac{\langle x, Tx \rangle}{\langle x, x \rangle} \,\middle|\, x \in \mathcal{D}(T) \right\} \subset \{ \mathrm{Re}(z) \leq 0 \}$$

$\implies$ keine EW mit positivem Realteil

M-Dissipative Operatoren:

Def: Sei T dissipativ.

$$\left.\begin{array}{l} T \text{ m-dissipativ} :\iff u - \lambda T u \text{ surjektiv } \forall \lambda > 0 \\ \qquad\qquad\qquad \iff (\lambda - T)u \text{ surjektiv } \forall \lambda > 0 \end{array}\right\} \implies \sigma(T) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset$$