Aufgabe 20

zz:

(1) $\rho((t,x),(s,y)) = \rho((s,y),(t,x))$

(2) $\rho((t,x),(s,y)) \geq 0$

(3) $\rho((t,x),(s,y)) = 0 \iff (t,x) = (s,y)$

(4) $\rho((t,x),(s,y)) \leq \rho((t,x),(r,z)) + \rho((r,z),(s,y))$

Bew:

(1) - (3) klar nach Eigenschaften von $|\cdot|$ und $\sqrt{\cdot}$

(4): folgt aus $\sqrt{t+s} \leq \sqrt{t} + \sqrt{s}$

Aufgabe 21

(i) zz: $[uv]_{\alpha,Q} \leq \|u\|_\infty [v]_{\alpha,Q} + [u]_{\alpha,Q} \|v\|_\infty$

Bew:

$$[uv]_{\alpha,Q} = \sup_{(x,t)\neq(y,s)\in Q} \frac{|u(x,t)v(x,t) - u(y,s)v(y,s)|}{\rho((x,t),(y,s))^\alpha}$$

Hinweis

$$\leq \sup_{(x,t)\neq(y,s)} \frac{|u(x,t)||v(x,t)-v(y,s)|}{\rho((x,t),(y,s))^\alpha} + \frac{|v(y,s)||u(x,t)-u(y,s)|}{\rho((x,t),(y,s))^\alpha}$$

$$\leq \|u\|_\infty \sup_{(x,t)\neq(y,s)} \frac{|v(x,t)-v(y,s)|}{\rho((x,t),(y,s))^\alpha} + \|v\|_\infty \sup_{(x,t)\neq(y,s)} \frac{|u(x,t)-u(y,s)|}{\rho((x,t),(y,s))^\alpha}$$

$$\leq \|u\|_\infty [v]_{\alpha,Q} + \|v\|_\infty [u]_{\alpha,Q}$$

(ii) zz: $[u+v]_{k+\alpha,Q} \leq [u]_{k+\alpha,Q} + [v]_{k+\alpha,Q} \quad \forall k \in \{0,2\}$

k=0:

$$[u+v]_{\alpha,Q} = \sup_{(x,t)\neq(y,s)} \frac{|u(x,t)+v(x,t) - u(y,s) - v(y,s)|}{\rho((x,t),(y,s))^\alpha}$$

$$\leq \sup_{(x,t)\neq(y,s)} \frac{|u(x,t)-u(y,s)|}{\rho((x,t),(y,s))^\alpha} + \sup_{(x,t)\neq(y,s)} \frac{|v(x,t)-v(y,s)|}{\rho((x,t),(y,s))^\alpha}$$

$$= [u]_{\alpha,Q} + [v]_{\alpha,Q}$$

k=2 folgt sofort aus k=0.

Satz von Taylor (1):

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R} \in C^{k+1}(U)$. Dann $\exists\, \theta \in [0,1]$:

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{\partial^\alpha f(x+\theta\xi)}{\alpha!} \xi^\alpha .$$

Betrachte Restglied für $|\xi| < r$

$$R(\xi) = \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{\partial^\alpha f(x+\theta\xi)}{\alpha!} \xi^\alpha$$

$\rightsquigarrow \ |R(\xi)| \leq C \cdot r^{k+1}$

$\Longrightarrow \dfrac{\left| f - \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^\alpha f}{\alpha!} \xi^\alpha \right|}{r^{k+1}}$ ist beschränkt für $r \to 0$ $\qquad (*)$

Satz von Taylor (2):

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^k(U)$. Dann gilt:

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + o(\|\xi\|^k) \quad \text{für } \xi \to 0$$

$\rightsquigarrow$ Wenn f nur in $C^k(U)$ liegt, muss $(*)$ nicht gelten!

$\Longrightarrow \dfrac{\left| f(x+\xi) - \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha \right|}{|\xi|^{k+\beta}}$ beschränkt liegt so zwischen diesen beiden Fällen.

Aufgabe 22:

$u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^{n+1})$.

ZZ: $$[u]'_{2+\alpha} \leq C\,[u]_{2+\alpha}$$

Bew:

Sei $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Satz von Taylor:

$$u(t,x) = u(t_0,x) + (t-t_0)\,\partial_t u(\tau,x) \qquad \text{für ein } \tau \in [t,t_0]$$

$$= u(t_0,x_0) + (t-t_0)\,\partial_t u(\tau,x) + \nabla u(t_0,x_0)\cdot(x-x_0)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(D_x^2 u(t_0,\xi)\cdot(x-x_0)\right)\cdot(x-x_0) \qquad \text{für ein } \xi \text{ zwischen } x \text{ und } x_0.$$

Definiere das Taylorpolynom 2. Ordnung von u durch:

$$\left(T_{(t_0,x_0)}u\right)(t,x) := u(t_0,x_0) + (t-t_0)\,\partial_t u(t_0,x_0) + \nabla u(t_0,x_0)\cdot(x-x_0)$$
$$+ \frac{1}{2}(x-x_0)^T\left(D_x^2 u(t_0,x_0)\right)\cdot(x-x_0)$$

Bemerke: $T_{(t_0,x_0)}u \in \mathcal{P}_2$.

Sei nun $0 < \rho((t,x),(t_0,x_0)) \leq r$. Berechne:

$$|u(t,x) - T_{(x_0,t_0)}u(t,x)| \leq r^2\,|\partial_t u(\tau,x) - \partial_t u(t_0,x_0)| + r^2 \sum_{i,j} |\partial_i\partial_j u(t_0,\xi) - \partial_i\partial_j u(t_0,x_0)|$$

$$\leq r^2 \Bigg[\rho((\tau,x),(t_0,x_0))^\alpha \frac{|\partial_t u(\tau,x) - \partial_t u(t_0,x_0)|}{\rho((\tau,x),(t_0,x_0))^\alpha} + $$
$$+ \sum_{i,j} \rho((t_0,\xi),(t_0,x_0))^\alpha \frac{|\partial_i\partial_j u(t_0,\xi) - \partial_i\partial_j u(t_0,x_0)|}{\rho((t_0,\xi),(t_0,x_0))^\alpha} \Bigg]$$

$$\leq C\,r^{2+\alpha}\left[\sup_{(\tau,x)\neq(t_0,x_0)} \frac{|\dots|}{\rho(\dots)^\alpha} + \sum_{i,j} \sup_{(t_0,\xi)\neq(t_0,x_0)} \frac{|\dots|}{\rho(\dots)^\alpha}\right]$$
$$= C\,r^{2+\alpha}\,[u]_{2+\alpha,\mathbb{R}^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \sup_{(t,x)} \sup_{r>0} r^{-2-\alpha} \cdot \inf_{p\in\mathcal{P}_2} \|u-p\|_\infty \leq \sup_{(t,x)} \sup_{r>0} r^{-2-\alpha}\,\|u - T_{(x_0,t_0)}u\|_\infty \leq C\,[u]_{2+\alpha,\mathbb{R}^{n+1}}$$

Aufgabe 23 : OBdA: $T=0$, sonst betrachte $\tilde{u}(x,t)=u(x,t+T)$.

Nehme an, Aussage wäre falsch (für Widerspruchsbeweis). Dann $\exists$ Folge $u_k \in C^\infty$:

(*) $$[u_k]_{C^{2+\alpha}(-\infty,T)} = 1 \quad ,$$

(*') $$[(\partial_t - \Delta) u_k]_{C^\alpha(-\infty,T)} = \frac{1}{k}$$

(*) $\Longrightarrow \exists (t_k,x_k) \in (-\infty,T]$ & $v_k \in \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$: $(t_k,x_k)+v_k \in (-\infty,T]$ und

$$\frac{|D^2u_k((t_k,x_k)+v_k) - D^2u_k(t_k,x_k)|}{\rho(v_k,0)^\alpha} + \frac{|\partial_t u_k((t_k,x_k)+v_k) - \partial_t u(t_k,x_k)|}{\rho(v_k,0)^\alpha} \geq \frac{1}{2}$$

$$\overset{\text{sybr}}{\Longrightarrow} \quad \frac{|D^2u_k((t_k,x_k)+h_k e_{i_k}) - D^2u_k(t_k,x_k)|}{\rho(h_k e_{i_k},0)^\alpha} + \frac{|\partial_t u_k((t_k,x_k)+h_k e_{i_k}) - \partial_t u(t_k,x_k)|}{\rho(v_k,0)^\alpha} \geq \frac{1}{2(n+1)} \qquad (**)$$

für mindestens ein $i_k \in \{1, \dots, n+1\}$ und h_k = Komponente von v_k in Richtung i_k.

1) OBdA: $i_k = i_0 \ \forall k$; sonst nimm Teilfolge.

2) OBdA: $(x_k,t_k)=(0,0)$, sonst nimm $\tilde{u}_k(x,t) = u_k(x+x_k, t+t_k)$

3) OBdA: $u_k = \partial_t u_k = \partial_{x_i} u_k = \partial_{x_i}\partial_{x_j} u_k = 0$ bei $(t,x)=(0,0)$,

sonst addiere Polynom $p \in \mathcal{P}_2$. Das ist erlaubt, weil $(\partial_t - \Delta)p = \text{const.} \ \forall p \in \mathcal{P}_2$ und $[\text{const}]_{2+\alpha} = 0$

4) OBdA: $h_k = 1$. Sonst, reskaliere:

$$\tilde{u}_k(x,t) = \begin{cases} h^{-2-\alpha} u_k(hx, h^2 t) & , \text{ falls } e_{i_0} \in \mathbb{R}^n \times \{0\} \\ \sqrt{h}^{-2-\alpha} u_k(\sqrt{h}x, ht) & , \text{ falls } e_{i_0} \in \{0\}\times\mathbb{R} \end{cases}$$

Mit diesen Annahmen folgt aus (**):

$$|D^2 u_k(e_{i_0})| + |\partial_t u_k(e_{i_0})| \geq \frac{1}{2(n+1)} \qquad \forall k \qquad (***)$$

Setze $\Gamma(R) := [-R^2, 0] \times \overline{B_R(0)}$ (← anders als in der Vorlesung!)

Für $(t,x) \in \Gamma(R)$ gilt:

$$\begin{aligned} |u_k(t,x)| &= |u_k(t,x) - u_k(0,0)| \qquad \text{nach 3)} \\ &\leq |u_k(t,x) - u_k(0,x)| + |u_k(0,x) - u_k(0,0)| \\ &\leq R^2 \|\partial_t u_k\|_{L^\infty(\Gamma(R))} + CR \|\nabla u_k\|_{L^\infty(\Gamma(R)\cap\{t=0\})} \end{aligned}$$

$$\leq R^2 \|\partial_t u_k\|_\infty + CR \|\nabla u_k - \nabla u_k(0,0)\|_{L^\infty(\Gamma(R)\cap\{t=0\})}$$ nach 3)

$$\leq R^2 \|\partial_t u_k\|_\infty + CR^2 \|D^2 u_k\|_{L^\infty(\Gamma(R))}$$

$$\leq CR^{2+\alpha} [u_k]_{2+\alpha}$$ nach Def. von $[\cdot]_{2+\alpha}$ und 3)

$$= CR^{2+\alpha}$$

$$\Longrightarrow \quad \sup_k \|u_k\|_{L^\infty(\Gamma(R))} \leq CR^{2+\alpha} \qquad (4*)$$

$$\Longrightarrow \quad \sup_k \|u_k\|_{2+\alpha,\Gamma(R)} \leq C\left(1+R^{2+\alpha}\right)$$

Arzela-Ascoli $\Longrightarrow \exists\, u \in C^{2,\alpha}$: $\quad u_k \to u$ in $C^{2,\beta}$ (modulo Teilfolge)
$\forall\, \beta < \alpha$

$\Longrightarrow$ $(***)$ gilt auch für Limes u:

$$|D^2 u(e_{i_0})| + |\partial_t u(e_{i_0})| \geq \frac{1}{2(n+1)} \qquad (5*)$$

Da Konvergenz in $C^{2,\beta}$ insbesondere gleichmäßige Konvergenz bedeutet, folgt aus $(4*)$:

$$\|u\|_{L^\infty(\Gamma(R))} \leq CR^{2+\alpha}$$

$$\Longrightarrow \|u\|_{L^1(\Gamma(R))} \leq CR^{n+4+\alpha} \qquad (6*)$$

Außerdem: $(*') \Longrightarrow [(\partial_t - \Delta)u]_{\overset{\circ}{C}^\beta} = 0$

$\Longrightarrow (\partial_t - \Delta) u$ const.

$\overset{(\partial_t-\Delta)u(0)=0}{\Longrightarrow} (\partial_t - \Delta) u = 0 \quad$ in $\Gamma(R)$

Jetzt benutze Th. 1.6.2 (Cauchy-Abschätzung), um Widerspruch zu $(5*)$ zu erhalten. Wähle $R>2$ und berechne:

$$|D^2 u(e_{i_0})| + |\partial_t u(e_{i_0})| \leq \|D^2 u\|_{L^\infty(\Gamma(1))} + \|\partial_t u\|_{L^\infty(\Gamma(1))}$$

$$\leq \|D^2 u - D^2 u(0)\|_{L^\infty(\Gamma(1))} + \|\partial_t u - \partial_t u(0)\|_{L^\infty(\Gamma(1))}$$

$$\leq C\left(\|D^3 u\|_{L^\infty(\Gamma(1))} + \|\partial_t D^2 u\|_{L^\infty(\Gamma(1))} + \|\partial_t D u\|_{L^\infty(\Gamma(1))} + \|\partial_t^2 u\|_{L^\infty(\Gamma(1))}\right)$$

$$\overset{\text{Th. 1.6.2}}{\leq} C\left(R^{-n-5} + R^{-n-6}\right) \|u\|_{L^1(\Gamma(R))}$$

$\overset{(6*)}{\Longrightarrow}$ $$|D^2 u(e_{i_0})| + |\partial_t u(e_{i_0})| \le C\left(R^{-n-5} + R^{-n-6}\right) R^{n+4+\alpha}$$

$$\le C' R^{\alpha-1}$$

$$\longrightarrow 0 \qquad (R \to \infty)$$

↯ zu (5*).