Aufgabe 25 (i)

Gelte: $-\varepsilon u'' + |u'| < 0$.

Ang. $\max\{u(0), u(1)\} < \max\limits_{[0,1]}(u)$.

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in (0,1): \max(u) = u(x_0)$

$\Rightarrow u'(x_0) = 0, \quad u''(x_0) \leq 0$

$\Rightarrow -\varepsilon u'' + |u'| \geq 0$ ↯

$\Rightarrow \max\{u(0), u(1)\} = \max\limits_{[0,1]}(u)$

Gelte $-\varepsilon u'' + |u'| = 0$.

Setze $\tilde{u}(x) := u(x) + \delta e^{\lambda x}$, $\lambda, \delta > 0$.

$\tilde{u}'(x) = u'(x) + \lambda \delta e^{\lambda x}$

$\tilde{u}''(x) = u''(x) + \lambda^2 \delta e^{\lambda x}$

$$\Rightarrow -\varepsilon \tilde{u}''(x) + |\tilde{u}'(x)| \leq -\varepsilon u''(x) - \varepsilon\lambda^2 \delta e^{\lambda x} + |u'(x)| + \lambda \delta e^{\lambda x}$$

$$= -\varepsilon u''(x) + |u'(x)| + (1-\varepsilon\lambda)\delta\lambda e^{\lambda x}$$

$\leadsto$ Für $\lambda > \frac{1}{\varepsilon}$ ist $-\varepsilon\tilde{u}'' + |\tilde{u}'| < 0$ (unabhängig von δ !)

$\Rightarrow \max\{\tilde{u}(0), \tilde{u}(1)\} = \max\limits_{[0,1]} \tilde{u}$

$$\Rightarrow \max_{[0,1]} u \leq \max_{[0,1]} \tilde{u} \leq \max\{\tilde{u}(0), \tilde{u}(1)\}$$

$$\leq \max\{u(0), u(1)\} + c\cdot\delta$$

$$\xrightarrow{\delta \to 0} \max\{u(0), u(1)\}$$

(iii)

Idee: $-\varepsilon u'' + u' = 1 \rightsquigarrow u(x) = \varepsilon e^{\frac{x}{\varepsilon}} C_1 + x + C_2$

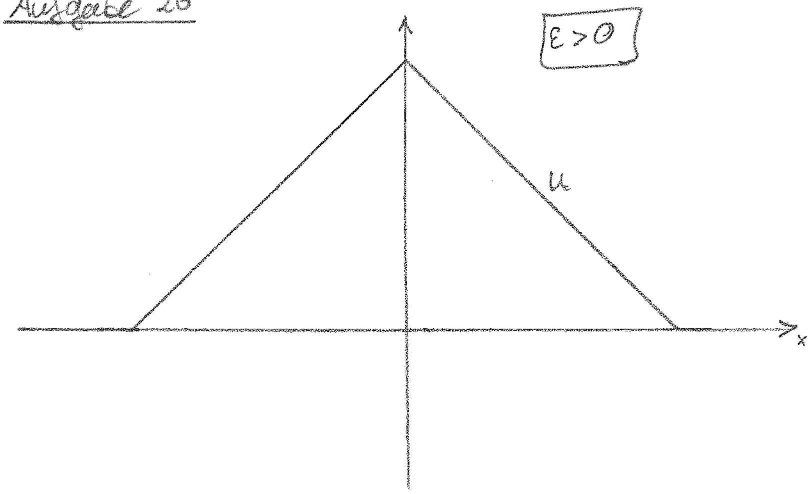
$-\varepsilon v'' - v' = 1 \rightsquigarrow v(x) = -\varepsilon e^{-\frac{x}{\varepsilon}} D_1 - x + D_2$

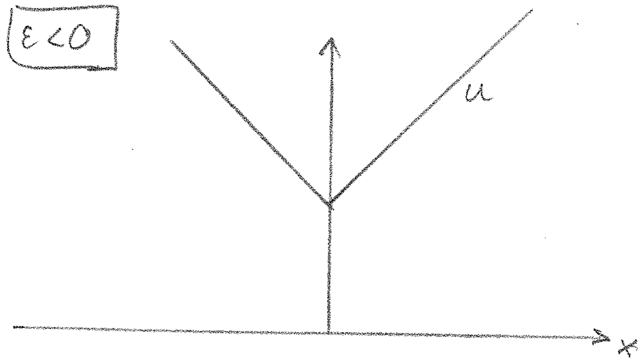
Bestimme C_i und D_i so, dass $w(x) := \begin{cases} v(x), & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ u(x), & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$ die richtigen Randbedingungen erfüllt und glatt ist.

Eindeutigkeit $\Rightarrow$ w ist DIE Lösung

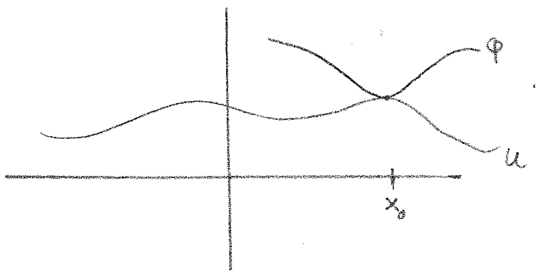
w symmetrisch $\Rightarrow$ Lösung symmetrisch.

Aufgabe 26





Aufgabe 27



$\varphi \geq u \Rightarrow \varphi - u \in C^2$ mit Minimum bei x_0

$\Rightarrow \nabla(\varphi - u) = 0, \quad D^2(\varphi - u) \geq 0$

(iii)

Idee: $-\varepsilon u'' + u' = 1 \quad \rightsquigarrow \quad u(x) = \varepsilon e^{\frac{x}{\varepsilon}} C_1 + x + C_2$

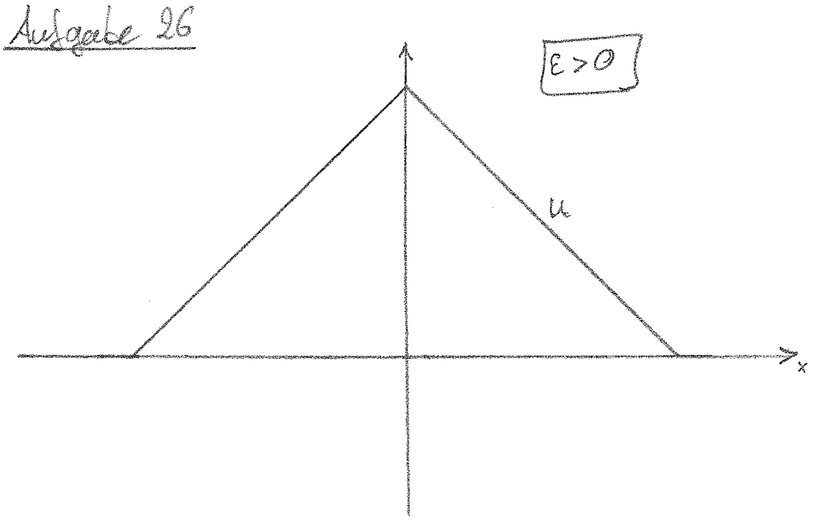
$-\varepsilon v'' - v' = 1 \quad \rightsquigarrow \quad v(x) = -\varepsilon e^{-\frac{x}{\varepsilon}} D_1 - x + D_2$

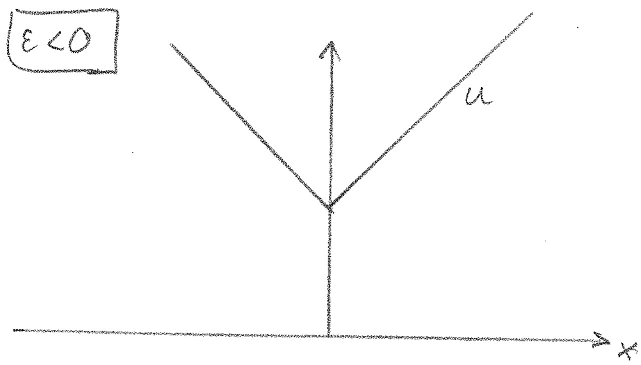
Bestimme C_i und D_i so, dass $w(x) := \begin{cases} v(x), & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ u(x), & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$ die richtigen Randbedingungen erfüllt und glatt ist.

Eindeutigkeit $\Rightarrow$ w ist DIE Lösung

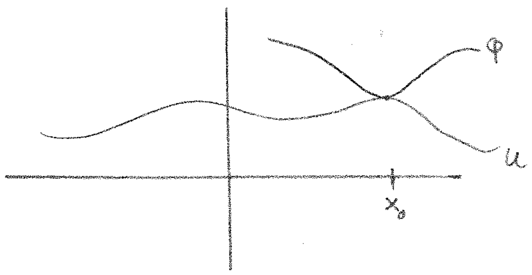
w symmetrisch $\Rightarrow$ Lösung symmetrisch.

Aufgabe 26





Aufgabe 27



$\varphi \geq u \Rightarrow \varphi - u \in C^2$ mit Minimum bei x_0

$\Rightarrow \nabla(\varphi - u) = 0, \quad D^2(\varphi - u) \geq 0$

/

Viskositätslösungen:

- F degeneriert elliptisch: $F(t,x,p,A) \geq F(t,x,p,B) \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}, \; p \in \mathbb{R}^n, \; A \leq B \in \mathbb{R}^{n\times n}_{symm.}$
- $u \in C^2_1(\mathbb{R}^{n+1})$ Lösung von

$$\partial_t u + F(t,x,\nabla u, D^2 u) = 0. \qquad (*)$$

Dann: $\forall \varphi \in C^2_1$: $\varphi \geq u$ und $\varphi(t_0,x_0) = u(t_0,x_0)$ gilt:

$$\nabla\varphi(t_0,x_0) = \nabla u(t_0,x_0), \quad D^2\varphi(t_0,x_0) \geq D^2 u(t_0,x_0)$$

$\Longrightarrow \quad \partial_t \varphi(t_0,x_0) + F(t_0,x_0,\nabla\varphi(t_0,x_0), D^2\varphi(t_0,x_0)) \leq 0$

$\Longrightarrow \quad \varphi$ Unterlösung

Analog: $\forall \varphi \in C^2_1$: $\varphi \leq u$, $\varphi(t_0,x_0) = u(t_0,x_0)$

$\Longrightarrow \quad \varphi$ Oberlösung

$\rightsquigarrow$ Definiere für allgemeine $u: Q \longrightarrow \mathbb{R}$:

(i) u ist Viskositäts<u>unterlösung</u> von $(*)$ $:\Longleftrightarrow$ u oberhalbstetig und $\forall (t_0,x_0) \in Q$:
$\forall \varphi \in C^2_1(Q)$ mit $\varphi \geq u$, $\varphi(t_0,x_0) = u(t_0,x_0)$:
$\partial_t \varphi + F(t,x,D\varphi,D^2\varphi) \leq 0$

(ii) u ist Viskositäts<u>oberlösung</u> von $(*)$ $:\Longleftrightarrow$ u unterhalbstetig und $\forall (t_0,x_0) \in Q$:
$\forall \varphi \in C^2_1(Q)$ mit $\varphi \leq u$, $\varphi(t_0,x_0) = u(t_0,x_0)$:
$\partial_t \varphi + F(t,x,\nabla\varphi,D^2\varphi) \geq 0$

(iii) u Viskositäts<u>lösung</u> $:\Longleftrightarrow$ Ober- und Unterlösung.

Eikonalgleichung:

$F(x, u', u'') = \quad |u'| - 1$

Nach Definition:

u Unterlösung $\Leftrightarrow$ $\forall x_0 \in (0,1)$: Wenn $\varphi \in C^2$ und $\varphi(x_0) = u(x_0)$, $\varphi \geq u$, dann:

$F(x_0, \varphi', \varphi'') \leq 0$

$\Leftrightarrow$

$|\varphi'(x_0)| - 1 \leq 0$

$\Leftrightarrow |\varphi'(x_0)| \leq 1$

$\leadsto$ Definitionen aus dem Skript und auf Blatt 7 stimmen überein!