O hipergrupach słów kilka

Żywilla Fechner

Instytut Matematyki Politechniki Łódzkiej

PolWoMaths Seminar 11.05.2021

Plan referatu

Wstęp

- Co to jest hipergrupa?
- Jak definiujemy funkcje na hipergrupie?
- Funkcje generujące momenty.

Algebra miar na grupie

Niech G będzie lokalnie zwartą grupą abelową Hausdorffa. Niech $M^b(G)$ oznacza przestrzeń Banacha wszystkich skończonych miar Radona na G. Niech dalej

$$M_d^b(G) := \left\{ \mu \in M^b(G) : \mu = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \delta_{g_k} \text{ gdzie } \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k| < \infty \right\}.$$

Splot dwóch miar Diraca jest zdefiniowany następująco

$$\delta_{g_1} * \delta_{g_2} := \delta_{g_1+g_2},$$

gdzie g_1, g_2 są elementami grupy G.

Rozszerzenie splotu na przestrzeń $M_d^b(G)$

Niech μ oraz ν będą elementami $M_d^b(G)$. Jeżeli istnieje taka miara ρ w $M_d^b(G)$, że dla każdej funkcji całkowalnej $f\colon G \to \mathbb{C}$

$$\int_G f(z)d\rho(z) = \int_G \int_G f(x+y)d\mu(x)d\nu(y),$$

to miarę ρ nazywamy splotem miar μ oraz ν i oznaczamy $\rho := \mu * \nu$.

Szkic uzasadnienia

Przyjmijmy $\mu = \nu = \delta_c$, gdzie $c \in G$ jest pewnym elementem grupy. Wtedy

$$\int_G \int_G f(x+y) d\mu(x) d\nu(y) = f(x+y),$$

zatem

$$\int_G f(z) d\rho(z) = f(x+y),$$

czyli

$$\rho = \delta_x * \delta_y = \delta_{x+y}.$$

Problem: co stanie się, gdy G zastąpimy dowolną przestrzenią lokalnie zwartą Hausdorffa bez struktury algebraicznej? Jak zdefiniować

$$\delta_{g_1} * \delta_{g_2} := \delta_{g_1 \cdots g_2}?$$

Krótki wstęp do hipergrup

Niech K będzie lokalnie zwartą przestrzenią Hausdorffa, $M^b(K)$ przestrzenią ograniczonych miar Radona na K. Niech dalej $M^1(K)$ będzie zbiorem wszystkich miar probabilistycznych na K. Załóżmy, że

- H^* Dla wszystkich x, y z K, splot miar Diraca $\delta_x * \delta_y$ jest ciągłym odwzorowaniem liniowym z $K \times K$ w $M^1(K)$.
- $H^\vee$ Istnieje inwolucja ${}^\vee\colon K \to K$ będąca jednocześnie homeomorfizmem.
- H^e Istnieje ustalony element e w K nazywany identycznością.

Krótki wstęp do hipergrup

Utożsamiając x **z** δ_x splot ma jedyne rozszerzenie do ciągłego odwzorowania dwuliniowego z $M^b(K) \times M^b(K)$ do $M^b(K)$.

Hipergrupą nazywamy czwórkę $(K, *, \check{}, e)$ spełniającą warunki

- $H1$ $\delta_x * (\delta_y * \delta_z) = (\delta_x * \delta_y) * \delta_z$,
- $H2$ $(\delta_x * \delta_y)\check{} = \delta_{\check{y}} * \delta_{\check{x}}$,
- $H3$ $\delta_x * \delta_e = \delta_e * \delta_x = \delta_x$,
- $H4$ $e \in \operatorname{supp}(\delta_x * \delta_{\check{y}}) \Leftrightarrow x = y$,
- $H5$ $\operatorname{supp}(\delta_x * \delta_y)$ jest zwarty,
- $H6$ Odwzorowanie $K \times K \ni (x, y) \mapsto \operatorname{supp}(\delta_x * \delta_y) \in \mathcal{C}(K)$ jest ciągłe.

Hipergrupa dwuelementowa

Niech $K = \{0, 1\}$, $0 < \theta \leq 1$, $e = 0$, $x^\vee = x$.

$$\delta_0 * \delta_0 = \delta_0, \quad \delta_0 * \delta_1 = \delta_1 * \delta_0 = \delta_1$$
$$\delta_1 * \delta_1 = \theta\delta_0 + (1 - \theta)\delta_1$$

Zauważmy, że $D(\theta) = \{\delta_0, \delta_1, \delta_1 * \delta_1\}$ jest grupą, jeżeli $\theta = 1$ oraz nie jest grupą, gdy $\theta \neq 1$.

Co oznacza $f(x * y)$?

Rozważmy przestrzeń probabilistyczną $(K, \mathcal{B}(K), \delta_x * \delta_y)$. Dowolna funkcja ciągła $f\colon K \to \mathbb{C}$ może być rozważana jako zmienna losowa. Wartość oczekiwana f względem δ_x wynosi

$$E_x(f) = \int_K f d\delta_x = f(x)$$

Ogólnej, dla dowolnej takiej miary μ, że f jest μ-całkowalna zachodzi

$$f(\mu) = E_\mu(f) = \int_K f d\mu.$$

W szczególności, w “notacji grupowej”

$$f(x * y) := f(\delta_x * \delta_y) = \int_K f(t) d(\delta_x * \delta_y)(t), \quad x, y \in K.$$

Funkcje addytywne

Ciągłą funkcję $a\colon K \to \mathbb{C}$ nazywamy addytywną, jeżeli

$$\int_K a(t)d(\delta_x * \delta_y)(t) = a(x) + a(y), \quad x, y \in K.$$

W notacji grupowej

$$a(x * y) = a(x) + a(y), \quad x, y \in K.$$

Ponadto, $a(e) = 0$.

Funkcje wykładnicze

Ciągłą funkcję $m\colon K \to \mathbb{C}$ nazywamy wykładniczą, jeżeli

$$\int_K m(t)d(\delta_x * \delta_y)(t) = m(x)m(y), \quad x, y \in K.$$

W notacji grupowej

$$m(x * y) = m(x)m(y), \quad x, y \in K.$$

Ponadto, $m(e) = 1$. Jeżeli $K = \mathbb{R}$, to

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} m(t)d(\delta_x * \delta_y)(t) &= \int_{\mathbb{R}} m(t)d(\delta_{x+y})(t)\\ &= m(x+y) = m(x)m(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Funkcje wykładnicze na $D(\theta)$

Niech $K = \{0, 1\}$, $0 < \theta \leq 1$, $e = 0$, $x^\vee = x$. Wtedy

$$m(x * y) = \int_{\{0,1\}} m(t) d(\delta_x * \delta_y)(t) = m(x)m(y)$$

Zawsze $m(0) = 1$. Rozważmy $x = y = 1$:

$$\begin{aligned} m(1 * 1) &= \int_{\{0,1\}} m(t) d(\delta_1 * \delta_1)(t) \\ &= \theta m(0) + (1 - \theta)m(1) \\ &= \theta + (1 - \theta)m(1) = m(1)m(1) \end{aligned}$$

Stąd albo $m \equiv 1$, albo $m(0) = 1$ oraz $m(1) = -\theta$.

$\delta_0 * \delta_0 = \delta_0$, $\quad \delta_0 * \delta_1 = \delta_1 * \delta_0 = \delta_1 \quad \delta_1 * \delta_1 = \theta\delta_0 + (1 - \theta)\delta_1$

Funkcje m-sinusowe

Niech $m\colon K \to \mathbb{C}$ będzie funkcją wykładniczą i niech $f\colon K \to \mathbb{C}$ będzie funkcja ciągłą. Funkcja f jest funkcją m-sinusową, jeżeli

$$f(x * y) = f(x)m(y) + f(y)m(x), \quad x, y \in K.$$

$$\int_K f(t)d(\delta_x * \delta_y)(t) = f(x)m(y) + f(y)m(x), \quad x, y \in K.$$

Każda funkcja m-sinusowa na $D(\theta)$ jest identycznie równa zero.
Funkcje m-sinusowe na hipergrupach rozważaliśmy z László Székelyhidim w pracy [3].

Funkcje generująca momenty

Niech $N \in \mathbb{N}$. Funkcja $\varphi\colon K \to \mathbb{C}$ jest funkcją generującą momenty rzędu N, jeżeli istnieją takie funkcje ciągłe $\varphi_k\colon K \to \mathbb{C}$ $(k = 0, \dots, N)$, że $\varphi_0 = 1$, $\varphi_N = \varphi$ oraz dla $k = 0, \dots, N$ dla każdych $x, y \in K$ zachodzi

$$\int_K \varphi(t) d(\delta_x * \delta_y)(t) = \varphi_k(x * y) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \varphi_j(x) \varphi_{k-j}(y).$$

Zauważmy, że funkcja wykładnicza jest funkcją generującą momenty rzędu zero, a funkcja m-sinusowa funkcją generującą momenty rzędu jeden.

Rodzina wykładnicza

Dla danej hipergrupy K oraz $n \in \mathbb{N}$ funkcja $\Phi\colon K \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ nazywana jest rodziną wykładniczą, jeżeli

EF1 Funkcja $x \mapsto \Phi(x, \lambda)$ jest wykładnicza na K dla każdego $\lambda \in \mathbb{C}^n$.

EF2 Funkcja $\lambda \mapsto \Phi(x, \lambda)$ jest całkowita dla każdego $x \in K$.

EF3 Dla każdej funkcji wykładniczej m na K istnieje taka $\lambda \in \mathbb{C}^n$, że $m(x) = \Phi(x, \lambda)$ dla każdego $x \in K$.

Każda rodzina wykładnicza spełnia warunek

$$\Phi(x * y, \lambda) = \Phi(x, \lambda)\Phi(y, \lambda), \quad x, y \in K,\ \lambda \in \mathbb{C}^n.$$

Rodziny wykładnicze vs funkcje generujące momenty

Twierdzenie (L. Székelyhidi,[6])

Niech K *będzie przemienną hipergrupą i niech* $\Phi\colon K \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *będzie rodziną wykładniczą. Wtedy*

$$x \mapsto \partial^j_{k+1}\Phi(x,\lambda), \quad j = 0, 1, \ldots, N$$

tworzy uogólniony ciąg generujący momenty względem funkcji wykładniczej $x \mapsto \Phi(x,\lambda)$.

W przypadku niektórych klas hipergrup można podać ogólną postać ciągu uogólnionych funkcji generujących momenty.

Przypadek nieabelowy

Prace dotyczące uogólnionych funkcji generujących momenty

- Ż. F., László Székelyhidi, Moment Functions on Affine Groups, Results in Mathematics, 74 (1) (2019),
- Ż. F., László Székelyhidi, Spherical and moment functions on the affine group of SU(n), Acta Mathematica Hungarica, 157 (1) (2019), 10–26

Grupa afiniczna

Niech V będzie n-wymiarową przestrzenią liniową nad $\mathbb{K}$ i niech $GL(V)$ oznacza ogólną grupę liniową przestrzeni V. Dla każdej podgrupy H grupy $GL(V)$ definiujemy produkt półprosty $\mathsf{Aff}\ H = H \ltimes V$ wprowadzając mnożenie na $H \times V$ w następujący sposób:

$$(x, u) \cdot (y, v) = (x \cdot y, x \cdot v + u), \quad x, y \in H, u, v \in V.$$

Wtedy $\mathrm{Aff}\,(H)$ jest grupą z jednością $(id, 0)$.

Twierdzenie (Ż. F., L. Székelyhidi,[4])

Niech V *będzie przestrzenią liniową skończenie wymiarową nad* $\mathbb{K}$ *i niech* K *będzie zwartą podgrupą grupy* $GL(V)$*. Ciąg* $(g_n)_{0\leq n\leq N}$ *ciągłych* K*-niezmienniczych funkcji zespolonych na* $\mathrm{Aff}\ K$ *jest uogólnionym ciągiem funkcji generujących momenty wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$g_n(x,u)=\varphi_n(u), \quad n=0,1\ldots,N,(x,u)\in \mathrm{Aff}\ K, \tag{1}$$

gdzie $\varphi_n : V\to\mathbb{C}$ *jest ciągła i* K*-niezmiennicza. Ponadto*

$$\int_K \varphi_n(k\cdot u+v)\,d\omega(k)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\varphi_j(u)\varphi_{n-j}(v) \tag{2}$$

dla $n=0,1\ldots,N$ *oraz dla każdego* u,v *w* V.

Przykład

Macierze postaci

$$\begin{pmatrix} x & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x, u \in \mathbb{C}, \quad x \neq 0.$$

tworzą podgrupę grupy $GL(2, \mathbb{C})$, która może być utożsamiania z podzbiorem zbioru $\mathbb{C}^2$ i jest lokalnie zwartą grupą G rozważaną z topologią dziedziczona z $\mathbb{C}^2$. Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ oraz $u, v \in \mathbb{C}$ mamy

$$\begin{pmatrix} x & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy & xv + u \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Zatem działanie grupowe na zbiorze

$$G = \{(x, u) : x, u \in \mathbb{C}, x \neq 0\}$$

możemy zapisać w następujący sposób

$$(x, u) \cdot (y, v) = (xy, xv + u), \quad (x, u), (y, v) \in G$$

Niech K oznacza zbiór wszystkich macierzy postaci

$$\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad |z| = 1$$

Zauważmy, że K jest zwartą podgrupą grupy G, zaś G jest topologicznie izomorficzna do $\mathrm{Aff}\,(K) = K \ltimes \mathbb{C}$.

Funkcja $f : G \to \mathbb{C}$ jest K-niezmiennicza wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(x,u) = f(e^{it}x, e^{is}u), \quad (x,u) \in G, s,t \in \mathbb{R}$$

Równanie (2) jest równaniem typu dwumianowego

$$\varphi_n(xy) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \varphi_j(x)\varphi_{n-j}(y), \quad x,y \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \tag{3}$$

gdzie $\varphi_n : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ jest ciągła i K-niezmiennicza.

Po odpowiednich przekształceniach otrzymujemy

$$\psi_n(u+v) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \psi_j(v)\psi_{n-j}(v), \quad u, v \in \mathbb{R} \tag{4}$$

Korzystając z wyniku [1] istnieją takie stałe zespolone $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, że

$$\psi_n(u) = n! \sum_{j_1+2j_2+\cdots+nj_n=n} \prod_{m=1}^{n} \left(\frac{\alpha_n u}{m!}\right)^{j_m} / j_m!, \quad u \in \mathbb{R}$$

Stąd otrzymujemy postać funkcji generujących momenty:

$$\varphi_n(x) = n! \sum_{j_1+2j_2+\cdots+nj_n=n} \prod_{m=1}^{n} \left(\frac{\alpha_n \ln(|x|)}{m!}\right)^{j_m} / j_m!, \quad x \neq 0, x \in \mathbb{C}.$$

Dziękuję za uwagę!

Literatura

[1] J. Aczél, *Functions of binomial type mapping groupoids into rings*, Math. Z. **154**, 115–124, 1977.

[2] W. Bloom and H. Heyer, *Harmonic analysis of probability measures on hypergroups*, de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 20, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1995.

[3] Ż.F., L. Székelyhidi, *Sine functions on hypergroups*, Arch. Math., 106 (4)(2016)

[4] Ż. F., L. Székelyhidi, *Moment Functions on Affine Groups*, Results in Math., 74 (1) (2019),

[5] Ż. F., L. Székelyhidi, *Spherical and moment functions on the affine group of SU(n)*, Acta Math. Hungarica, 157 (1) (2019), 10–26

[6] L. Székelyhidi, *Functional Equations on Hypergroups*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., New Jersey, London, 2012.