

O ENTROPII ILO CZYNU PROCESÓW STACJONARNYCH

(wspólne prace z Michałem Lemańczykiem - arXiv: 2004.07648)

(J. Kułaga - Przymus
15.09.2020)

① Procesy a układy dynamiczne

Układ dynamiczny (mierzalny): $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$, $T: (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$
 $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$

ergodyczność: $T^{-1}A = A \Rightarrow \mu(A) \in \{0, 1\}$

Topologiczny układ dynamiczny: (X, T) , $T: X \rightarrow X$

X = zwarta przestrzeń metryczna
 T = homeomorfizm

(H. Kuznetsov - Bogdanova: istnieje miara niezmiennicza

$$\frac{1}{N} \sum_{n \leq N} \delta_{T^n x}, \quad x \in X, \text{ stałe granice})$$

Przykład $X \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ $S((x_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = (y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, $y_i = x_{i+1}$ } podshifty
↳ top. produktowe
↳ domknięty, S -niezmienny

$$\delta_{(\dots 0 \dots)}, \frac{1}{2}(\delta_{(\dots 010 \dots)} + \delta_{(\dots 101 \dots)}), B(r_2, r_2), \dots$$

układ dyn. $\rightsquigarrow$ proces stacjonarny: $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ miernalność, $(f \circ T^i)_{i \in \mathbb{Z}}$

② proces $\leadsto$ układ dyn: proces $X = (X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, $X_i \in \mathcal{X}$
 myślimy o układach shiftowych przestrzeni stanów...
 nie $X \subseteq \mathcal{X}^{\mathbb{Z}}$ (rozpatujemy μ = rozkład X)
 alfabet

② Problem odszumiania sygnału (Furstenberg 1967)

X = sygnał, Y = szum, $X \perp Y$ (niezależność)

P1 Kiedy można odzyskać X z $X+Y$?

Rozróżniamy układy dynamiczne: $(X, B, \mu, T) \perp (Y, C, \nu, S)$
 gdy $\mu \otimes \nu$ jest jedynym
 miarą $T \times S$ -niezmiennej
 o rozkładzie μ oraz ν

Furstenberg:

$X \perp Y$ są „absolutnie niezależne”, a ile stworzone układy dynamiczne są rozróżnialne. Wówczas X jest mierny względem σ -algebry generowanej przez $X+Y$ (dod. zał: całkowitość X, Y)

(Gorbit 2011: zał. całkowitości można pominąć)

~~Jeśli więc tylko $X \perp Y$ przyjmując wartości dodatnie, to można użyć logarytmu. $\log X, Y$. Pytamy teraz o X, Y zamiast $X+Y$~~
~~Jeśli $X_i, Y_i \in (0, \infty)$, to można użyć logarytmu~~

Zakładamy teraz, że $\forall Y_i \in \{0,1\}$.

[P2] kiedy można odzyskać $X \geq X \cdot Y$.

(3) Entropia procesu (avg. entropy rate)
 X = zmienne losowe, $H(X) = -\sum_{i=1}^n P(x_i) \log P(x_i)$ entropia Shannona

$$H(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(X[0, n-1])$$

wersja relatywna: $H(X|Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(X[0, n-1] | Y[0, n-1])$.

Uwaga: Aby móc odzyskać $X \geq M = X \cdot Y$, nie możemy mieć $H(X) \not\geq H(X \cdot Y)$!

Będziemy zakładać dodatkowo:

(i) X - skończone przestrzeni stanów

Y - ergodyczny, $Y_i \in \{0,1\}$, $P(Y_0=1) \in (0,1)$

(ii) $X \perp Y$ (niezależność)

Nówczas aby móc odzyskać X , musimy mieć $H(M) = H(X)$.

[P3] A. Znaleźć wzór na $H(M)$, $M = X \cdot Y$

B. Czy $H(X) > 0 \Rightarrow H(M) > 0$

C. Czy jest możliwe $H(M) = H(X)$, $\angle H(X) > 0$.

④ Układy B-nolne i miary niezmiennicze

$B \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$. $\rightsquigarrow$ zbiór wielokrotności $\mathcal{U}_B = \bigcup_{b \in B} b\mathbb{Z}$

$\longrightarrow$ zbiór B-nolny $\mathcal{F}_B = \mathbb{Z} \setminus \mathcal{U}_B$.

lata 30-te (Choate, Erdős, Besicovitch, ...) $\rightarrow$ teoria liczb.

Spojenie dynamiczne $\rightarrow$ Sarnak 2010.

Przykład

$$B = \{p^2 : p \in \mathcal{P}\}$$

$\mathcal{U}_B =$ liczby podzielne
przez kwadrat

$\mathcal{F}_B =$ liczby bezkwadratowe

$$\mu : \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$$

$$\mu(1) = 1, \mu(p_1 \cdots p_k) = (-1)^k, \mu(n) = 0 \text{ w p.p.}$$

$$\mu^2 = 1_{\mathcal{F}_B} \text{ dla}$$

(symetryczne rozszerzenie do $\mathbb{Z}$)

Dynomika: Traktujemy μ^2 jako punkt $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$.

$$X_{\mu^2} = O(\mu^2) = \{S^n \mu^2 : n \in \mathbb{Z}\} = \text{układ berkwadriotowy}$$

(Ogólniej: X_η)

Sermoh zaproponował, aby zacząć układ X_{μ^2} , aby domednić się więcej o układzie X_μ .

Hipoteza Sermoha: $\frac{1}{N} \sum_{n \leq N} f(T^n x) \mu(n) \rightarrow 0$ dla (X, T) o entropii zero

Hipoteza Chowli: $\frac{1}{N} \sum_{n \leq N} \mu^{i_0}(n) \mu^{i_1}(n+a_1) \dots \mu^{i_r}(n+a_r) \rightarrow 0$

(nie wszystkie i są parzyste)

$Ch \Rightarrow S$

$\frac{1}{N} \sum_{n \leq N} \mu(n) = 0$ o liczbach pierwszych ("S" jednopunktowy)

Miara Mirskiego: ν_η - zero entropia

$\mathcal{B}$ - parami względnie pierwsze, $\sum \frac{1}{b} < \infty$

przypadek Erdősa
(zostaniemy przy nim
dla uproszczenia
sytuacji)

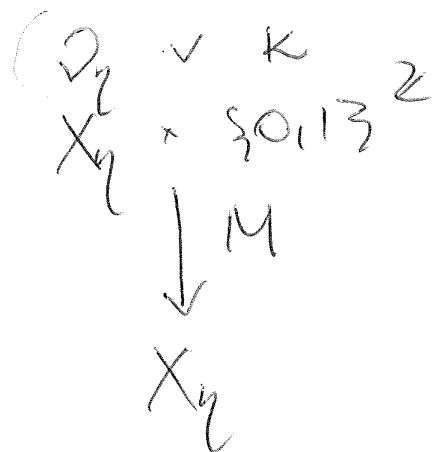
$\Rightarrow \eta$ generujący dla ν_η

$$\frac{1}{N} \sum_{n \leq N} \delta_{S_\eta^n} \rightarrow \nu_\eta$$

(patnymy na frekwencje bloków)

~~To $\forall \mathcal{D} \in \mathcal{M}^c$~~

Uwaga w przypadku Erdősa układ X_η jest dzieńdziczny : $x \in X_\eta, y \in \{0,1\}^\mathbb{Z} \Rightarrow M(x,y) \in X_\eta$.



$\mathcal{D} = \mathcal{D}_\eta \vee K$
połączenie

$M_*(s) \in \mathcal{M}(X_\eta, s)$
Innych nie ma!

(KP, ^{Monius}Lemonczyk, Weiss i Monius, Dymek, Kaspr. KP, Lemonczyk)

Układ (X_η, s) jest nieunetrznie op. (Pechner oraz $\uparrow \uparrow$)
zn. tylko jedno miarę realizuje entropię topologiczną : $M_*(\mathcal{D}_\eta \otimes B_{1/2, 1/2})$

Monius : $0 < h(M_*(\mathcal{D}_\eta \otimes B_{1/2, 1/2})) < h(\mathcal{D}_\eta \otimes B_{1/2, 1/2})$ $\mathcal{D}_\eta * B_{1/2, 1/2}$

[P4] A. Znaleźć wzór na $h(M_*(\mathcal{D}_\eta \otimes B_{1/2, 1/2}))$

B. Czy $h(K) > 0 \Rightarrow h(\mathcal{D}_\eta * K) > 0$?

C. Czy może zachodzić $h(\mathcal{D}_\eta * K) = h(K) > 0$?

5) Główny wniosek

(pyt 3A)

$$(A) H(X, Y | Y) = P(Y_0=1) E_{Y_0=1} H(X_0 | X_{r-1}, r-2, \dots) \Big|_{r-i=R-i}$$

$$(B) H(X, Y | Y) \leq H(X) - P(Y_0=1)^2 E_{Y_0=1} H(X_{[1, r_1]} | X_{(-\infty, 0]}, X_{\{r_1, r_2, \dots, 3\}} \Big|_{r=R}$$

tego nie
mo!

Wniosek

$$(1) \text{ Jeśli } H(Y)=0 \text{ to } P(Y_0=1)H(X) \leq H(M) \leq P(Y_0=1)H(X_0)$$

$$(\text{wynika to z (A) oraz } H(X) \leq H(X_0 | X_{r-1}, r-2, \dots) \leq H(X_0))$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} H(X) > 0 \\ P(Y_0=1) > 0 \end{cases} \Rightarrow H(M) > 0} \quad (\text{pyt 3B})$$

(2) Pytamy teraz o spadek entropii
jeśli $P(R_1=x) > 0$ dla niektórych x i X nie jest
deterministycznie determinowany, to $H(M) < H(X)$.

Zamiat def: Procsy stajone me idore me ng dlistionme
deterministyme ?

- procsy nymenialne
- tricuady Martoso

- procsy really Bernoulli (Friedman, Ornstein 1970)

really B. $\Rightarrow$ very really Bernoulli (= isomorphic to Bernoulli)

$\Downarrow$
absolute
regularity

~~yes~~ 8